Extremos de funções escalares

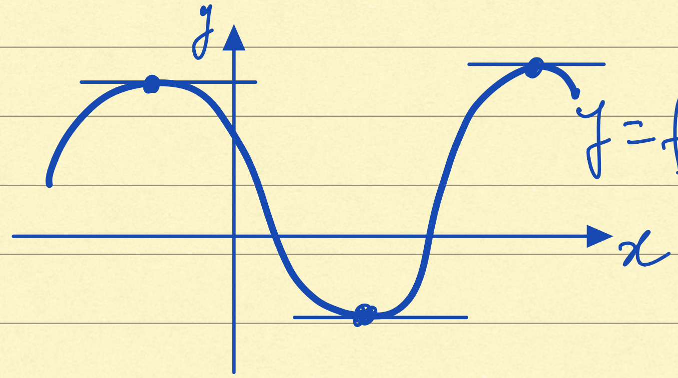
$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underbrace{Df(x)}_{\substack{\text{matriz}\\ 1\times n}} \equiv \underbrace{\nabla f(x)}_{\text{vector}} \quad (\text{gradiente}) \qquad \nabla \equiv \text{nabla}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \;\ldots\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right] \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

Recordar CDI-I :

Candidatos a extremo : $f'(x) = 0$



__Definição__: Diz-se que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de __classe C^1__ se f e as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ forem funções contínuas

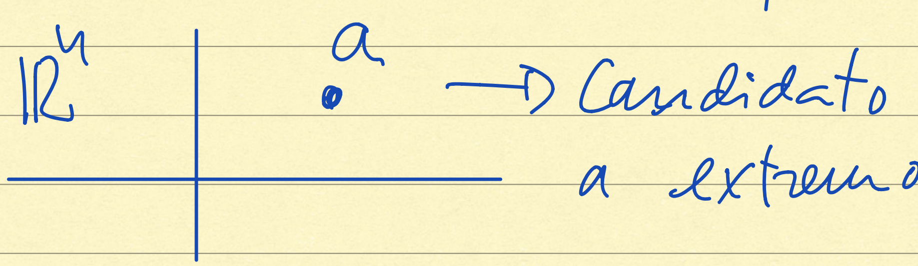
——— // ———

__Teorema__: Se f for de classe C^1 então f é diferenciável.

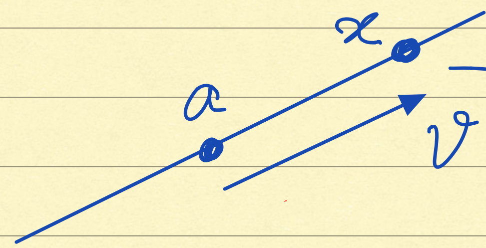
(__ver livro__)

——— // ———

__Critério__ para localizar os extremos de uma função???



<u>Truque:</u> passar de n variáveis ($\mathbb{R}^n$) para 1 variável ($\mathbb{R}$):



$\longrightarrow g(t) = a + tv$

$\boxed{t \in \mathbb{R}}$

1 variável

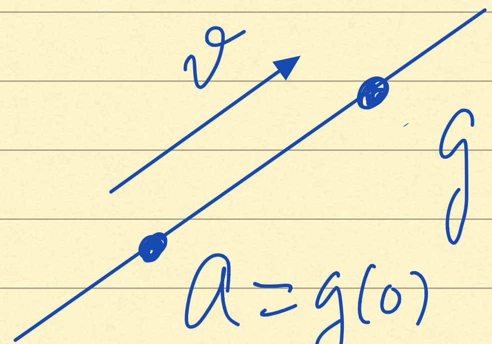
$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$h(t) = \underbrace{f(g(t))}_{\text{Composta}}$ = f vista apenas sobre os pontos da recta!

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, mapsto] & g(t) \arrow[r] & f(g(t)) \\ \mathbb{R} \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "h = f \circ g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

CDI-I !!!

$f(x) \hookrightarrow$ n variáveis ; $f(g(t)) \rightarrow$ 1 <u>variável</u>



$g(t) = a + tv;\ t \in \mathbb{R}$

$a = g(0) \longrightarrow \boxed{t = 0}$

$h(t) = f(g(t))$

$\boxed{h'(0) = 0} \Longrightarrow \boxed{f\ ???\ldots}$

$h'(t) = \nabla f(g(t))\ g'(t)$

$\underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{1\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{n\times 1} \rightarrow$ produto interno!

$h'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t)$ (vectorial)

$$h'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t)$$

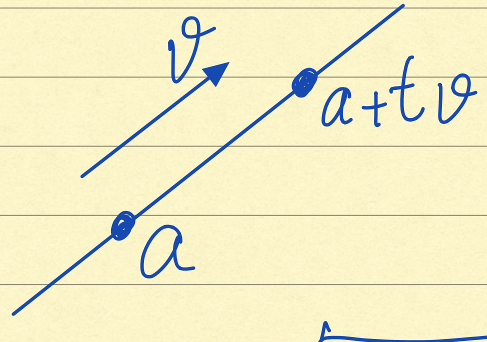
$$0 = h'(0) = \nabla f(g(0)) \cdot g'(0)$$

Mas

$$g(t) = a + tv, \quad g'(t) = v$$

$$\Rightarrow \quad 0 = h'(0) = \nabla f(a) \cdot v$$

$$\boxed{\nabla f(a) \cdot v = 0} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$



$\Updownarrow$ $\nabla f(a)$ é ortogonal a qualquer vector $v \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla f(a) = 0}$$

Definição: Se $a \in \mathbb{R}^n$ for tal que $\nabla f(a) = 0$ diz-se que a é $\boxed{\text{ponto crítico}}$ de f.

(ponto de estacionaridade)

Exemplo: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$

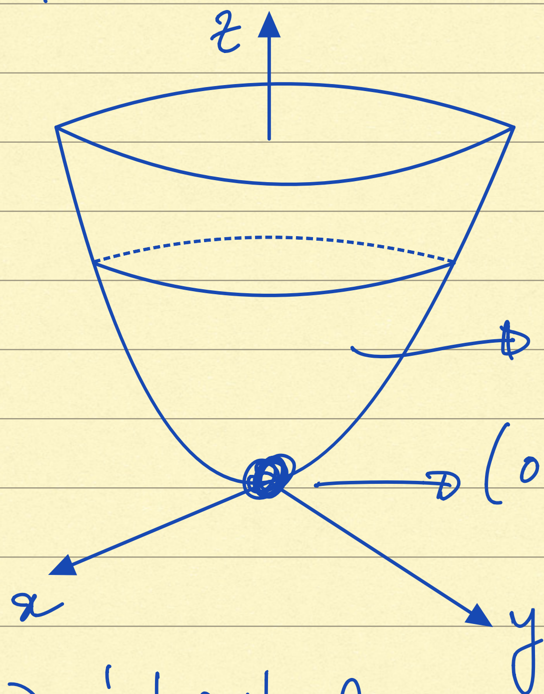
$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(0,0) \longrightarrow$ ponto crítico de f.

$f(0,0) = 0$; $f(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$(0,0)$ é ponto de mínimo absoluto de f.

gráfico de f: $z = f(x,y) = x^2 + y^2$



paraboloide

$\to z = x^2 + y^2$

$\to (0,0,0) = (0,0,f(0,0))$

$(0,0)$ é ponto de mínimo absoluto de f.

— // —

Exemplo: $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ -4x + x = 0 \end{cases} \begin{matrix} y = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$

CDI-I: $f'(a)=0$

$$f''(a)\begin{cases} >0 \to \text{min.} \\ <0 \to \text{máx.} \\ =0 \to f'''? \end{cases}$$

Derivadas de 2ª ordem

Exemplo: $f(x,y) = x^3 y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6xy^2 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \boxed{6x^2y} \end{cases}$$

iguais !!!

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \boxed{6x^2y} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2x^3 \end{cases}$$